

# Mikrowellen-Radiometer

Roland Gersch, Fatma Kul, Tanja Striepling, Christian Stromenger

22.05.02

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbereitung</b>	<b>4</b>
1.1	Passive Radiometrie . . . . .	4
1.2	Antennencharakteristik . . . . .	5
1.2.1	Strahlungswiderstand . . . . .	5
1.2.2	Polarisation . . . . .	5
1.2.3	Effektive Antennenoberfläche . . . . .	5
1.2.4	Antennengewinn . . . . .	5
1.2.5	Antennendiagramm . . . . .	6
1.2.6	Richtschärfe . . . . .	6
1.2.7	Effektiver Raumwinkel . . . . .	6
1.2.8	Hauptkeulenwirkungsgrad . . . . .	7
1.3	Auswirkung der Ausdehnung des Messobjekts . . . . .	8
1.3.1	Dipol . . . . .	8
1.3.2	Dipolfeld . . . . .	8
1.3.3	Yagi-Antenne . . . . .	8
1.3.4	Rahmenantenne . . . . .	8
1.3.5	Helixantenne . . . . .	8
1.3.6	Helixfeld . . . . .	9
1.3.7	Langdrahtantenne . . . . .	9
1.3.8	Rhombusantenne . . . . .	9

1.3.9	Schlitzantenne . . . . .	9
1.3.10	Linsenantenne . . . . .	9
1.3.11	Reflektorantenne . . . . .	9
1.3.12	Parabolreflektoren . . . . .	9
1.4	Polarisationseffekte . . . . .	10
1.5	Heterodyn-Radiometer . . . . .	10
1.6	Lokalszillator . . . . .	10
1.6.1	Reflexklystron . . . . .	10
1.6.2	Wanderfeldröhre . . . . .	11
1.6.3	Gunn-Diode . . . . .	11
1.6.4	Vervielfacher . . . . .	12
1.7	Mischer . . . . .	12
1.7.1	Schottky-Diode . . . . .	14
1.7.2	SIS-Mischer . . . . .	15
1.7.3	Quantenmischer . . . . .	16
1.7.4	Mischeffizienz (Conversion Efficiency) . . . . .	16
1.8	Rauschen . . . . .	16
1.8.1	Thermisches Rauschen . . . . .	16
1.8.2	Schrotrauschen . . . . .	17
1.8.3	1/f-Rauschen . . . . .	17
1.9	Nyquist-Theorem . . . . .	17
1.9.1	Qualitative Vorbetrachtung . . . . .	17
1.9.2	Quantitative Herleitung der Nyquist-Formel . . . . .	18
1.10	Rauschleistung . . . . .	19
1.11	Schwarzer Körper . . . . .	20
1.12	Hot-Cold-Verfahren . . . . .	21
1.13	Gesamtrauschtemperatur der Verstärkerkette, Mischverlust . . . . .	21
1.14	Radiometerformel . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Auswertung</b>	<b>24</b>

2.1	Aufgabe 1: Kalibration des variablen Dämpfungsglieds . . . . .	24
2.2	Aufgabe 2: Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur $T_R(P_{LO})$ . .	24
2.3	Aufgabe 3: Bestimmung der ZF-Rauschtemperatur . . . . .	27
2.4	Aufgabe 4: Bestimmung des Mischverlusts $L$ . . . . .	27
2.5	Aufgabe 5: Bestimmung von $T_R$ mit Hornantenne und Abschlusswiderstand	27

# 1 Vorbereitung

## 1.1 Passive Radiometrie

Passive Radiometrie ist die Messung von natürlicher Strahlung, im Gegensatz zu aktiven Radiometrie, dem Radar, wo Strahlung ausgestrahlt wird und man dann aus ihrem Reflexionsverhalten Rückschlüsse auf z.B. die Position von Körpern ziehen kann. Passive Radiometer bestehen daher nur aus einem Empfangsteil, der allerdings sehr viel empfindlicher sein muß, als der Empfänger eines Radars.

## 1.2 Antennencharakteristik

### 1.2.1 Strahlungswiderstand

### 1.2.2 Polarisierung

### 1.2.3 Effektive Antennenoberfläche

### 1.2.4 Antennengewinn

1.2.5 Antennendiagramm

1.2.6 Richtschärfe

1.2.7 Effektiver Raumwinkel

## 1.2.8 Hauptkeulenwirkungsgrad

## 1.3 Auswirkung der Ausdehnung des Messobjekts

### 1.3.1 Dipol

### 1.3.2 Dipolfeld

### 1.3.3 Yagi-Antenne

### 1.3.4 Rahmenantenne

### 1.3.5 Helixantenne

- 1.3.6 Helixfeld
- 1.3.7 Langdrahtantenne
- 1.3.8 Rhombusantenne
- 1.3.9 Schlitzantenne
- 1.3.10 Linsenantenne
- 1.3.11 Reflektorantenne
- 1.3.12 Parabolreflektoren

## 1.4 Polarisierungseffekte

## 1.5 Heterodyn-Radiometer

Das (Super-)Heterodynprinzip wird zum Empfang von sehr hochfrequenten Signalen benutzt.

Ein typischer Detektor benötigt eine Eingangsleistung von  $10^{-5}$  Watt. Um eine Eingangsrauschleistung, gegeben durch  $P_{sys} = k_B T_{sys} \Delta\nu$ , auf diese Leistung zu verstärken, benötigt man eine Verstärkung von

$$G = 10 \times \log \frac{10^{-5} W}{k_B T_{sys} \Delta\nu}.$$

Für typische Systemrauschtemperaturen und zu messenden Bandbreiten ergibt sich  $G = 76dB$ .

Bei so hohen Verstärkungen entstehen leicht Rückkopplungseffekte. Außerdem stehen oberhalb einer Frequenz von etwa 100 Gigahertz zur Zeit keine ausreichend rauscharmen Verstärker zur Verfügung.

Deswegen behilft man sich mit der Mischung des vorliegenden HF-Signals mit dem geringfügig niederfrequenten Signal eines lokalen Oszillators (LO). Die entstehende Welle hat eine Zwischenfrequenz ZF. Es gilt  $\nu_{ZF} = \nu_{HF} - \nu_{LO}$ .

Als Mischer werden SIS-Mischer (1.7.2) oder Schottky-Dioden (1.7.1) eingesetzt. Das ZF-Signal kann nun gefiltert, verstärkt und detektiert werden.

Die Verwendung des Heterodyn-Prinzips erlaubt die Verwendung einer Verstärker - Filter - Detektor - Kombination für verschiedene Frequenzen. Dazu muß nur die Frequenz des lokalen Oszillators entsprechend angepaßt werden.

Nach: [2]

## 1.6 Lokaloszillator

Als Oszillator werden je nach Frequenzbereich unterschiedliche Konstruktionen eingesetzt, darunter das Reflexklystron (1.6.1), die Wanderfeldröhre (1.6.2) und die Gunn-Diode (1.6.3).

### 1.6.1 Reflexklystron

Ein Elektronenstrahl wird erzeugt und in einen Resonator geleitet. In diesem schwingt ein elektromagnetisches Feld. Die Elektronen werden also im Wechsel beschleunigt/verzögert. Es bilden sich also Elektronenpakete. Diese werden nach Verlassen des Resonators in diesen zurück reflektiert. Ist das System richtig abgestimmt, so rückkoppeln die reflektierten Elektronen und verstärken das Schwingungsfeld im Resonator. Ein

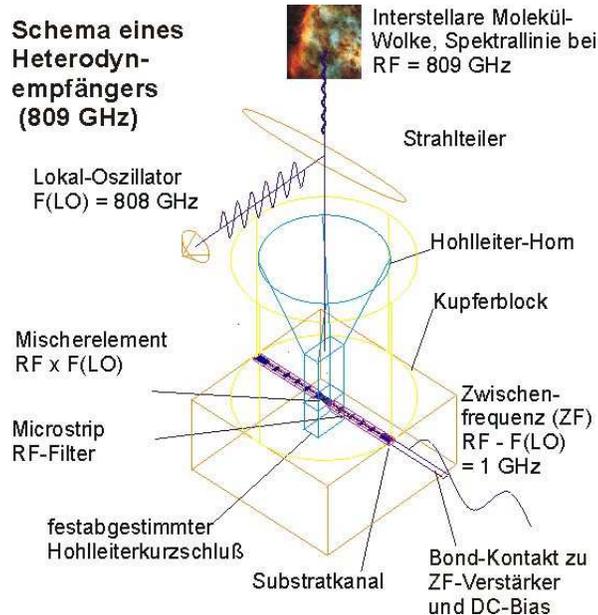


Abbildung 1: Schema eines Heterodyn-Empfängers. Quelle: [1]

Teil der Leistung wird aus dem Resonator ausgekoppelt und steht für Mischungen zur Verfügung.

Diese Art von Oszillatoren wird für Frequenzen bis etwa 250 GHz eingesetzt. Ihre Ausgangsleistung ist ausreichend groß. Allerdings sind sie durch ihre Dimensionierung schon bei der Produktion auf eine Frequenz festgelegt.

### 1.6.2 Wanderfeldröhre

Auch bei der Wanderfeldröhre wird die Wechselwirkung zwischen Elektronenpaketen und schwingenden Feldern ausgenutzt. Allerdings ist das schwingende Feld in diesem Fall eine Welle, die entlang des Elektronenstrahls geleitet wird. Am Ende der Leitung wird sie reflektiert, und ein Teil der Leistung wird ausgekoppelt.

Da die Welle sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, die Elektronen aber langsamer sind, wird die Welle entlang eines Wendels geführt. Entlang des Drahtes bewegt sie sich mit Lichtgeschwindigkeit, die Komponente der Bewegung entlang des Elektronenstrahls ist aber  $v_{||e^-} = \cos \alpha c$ . Dabei ist  $\tan \alpha = \frac{d}{\Delta x}$ , mit dem Durchmesser  $d$  des Wendels. Es ist  $\Delta x = \frac{l}{n}$  mit der Länge des Wendels  $l$  und der Windungszahl  $n$ .

Die Wanderfeldröhre erlaubt höhere Frequenzen als das Reflexklystron. Allerdings ist die Ausgangsleistung geringer.

### 1.6.3 Gunn-Diode

In Gallium-Arsenid-Kristall sinkt mit steigendem Feld die Beweglichkeit der Elektronen ab einer bestimmten Feldstärke ("negative differentielle Beweglichkeit der Lei-

tungselektronen"). Das elektrische Feld verteilt sich also nicht gleichmäßig. Es entstehen Zonen erhöhter Raumladungsdichte, die mit der Driftgeschwindigkeit  $v$  der Ladungsträger durch ein Kristall der Dicke  $d$  wandern. Dies führt zu einer Schwingung der Frequenz  $\nu = \frac{v}{d}$ .

Für hohe Frequenzen sind also sehr dünne Schichten erforderlich. Es werden dafür hochohmige Epitaxieschichten auf niederohmige Basismaterialien aufgebracht. Den Widerstand steuert man durch die Dotierungsdichte.

Um die Schwingung der Gunn-Diode auf einen Hohlraumleiter zu übertragen, setzt man kreisförmige Resonatoren ein. Deren Durchmesser bestimmt dann mit der Dicke der Schicht die Lage der Oszillatorfrequenz.

#### 1.6.4 Vervielfacher

Es gibt Bauteile mit nichtlinearer Widerstandskennlinie oder spannungsabhängiger Kapazität. Sie erzeugen höhere harmonische einer von außen angelegten Grundfrequenz.

Halbleiterdioden, deren Sperrschichtkapazität stark von der Spannung in Sperrichtung abhängt, heißen *Varaktoren*. Sie werden zum Vervielfachen verwendet, ebenso wie im mm-Wellenbereich Schottky-Dioden (1.7.1).

Mit steigender Frequenzvervielfachung  $n$  sinkt die Ausgangsleistung des Vervielfachers. Praktisch wird für Mischungszwecke nur höchstens  $n = 3$  genutzt. Im mm-Wellenlängenbereich kann man so lokale Oszillatoren bis 300 GHz realisieren.

Mechanisch gesehen schaltet man hinter einen Hohlleiter für die zu vervielfachende Frequenz  $f$  einen Tiefpaßfilter. Dieser vermeidet ein Eindringen der vervielfachten Frequenz in die ursprüngliche Schwingung. Hinter den Filter plaziert man den Varaktor. Diesen koppelt man an einen Hohlleiter für die vervielfachte Schwingung.

### 1.7 Mischer

Jedes Bauelement mit nichtlinearer Strom-Spannungskennlinie ist als Mischer geeignet. Für kleine Änderungen  $\delta U$  einer Grundspannung  $U_0$  läßt sich die Kennlinienfunktion in eine Taylorreihe entwickeln:

$$I(U_0 + \delta U) = I(U_0) + I'(U_0)\delta U + \frac{1}{2}I''(U_0)(\delta U)^2 + \dots \quad (1)$$

Sei im weiteren  $k_i := I^{(i)}(U_0)$ . Die Spannungsänderung  $\delta U$  wird im Mischer erzeugt durch Signal  $S$  und Lokaloszillator  $LO$ :

$$\delta U = A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_s t)$$

In (1) bis zur zweiten Ordnung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
I(U_0 + \delta U) &= k_0 + k_1 (A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_{ST}t)) \\
&\quad + k_2 ((A^2 \sin^2(\omega_{LO}t) + B^2 \sin^2(\omega_{ST}t) + 2AB \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_{ST}t)) + \dots \\
&\stackrel{\sin^2=1-\cos^2}{\approx} k_0 + k_1 (A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_{ST}t)) \\
&\quad + \frac{k_2}{2} (A^2 + B^2) \\
&\quad + \frac{k_2 A^2}{2} (\sin^2(\omega_{LO}t) - \cos^2(\omega_{LO}t)) \\
&\quad + \frac{k_2 B^2}{2} (\sin^2(\omega_{ST}t) - \cos^2(\omega_{ST}t)) \\
&\quad + k_2 2AB \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_{ST}t) \\
&\stackrel{\cos^2=\cos^2-\sin^2}{=} k_0 + k_1 (A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_{ST}t)) \\
&\quad + \frac{k_2}{2} (A^2 + B^2) \\
&\quad - \frac{k_2}{2} (A^2 \cos(2\omega_{LO}t) + B^2 \cos(2\omega_{ST}t)) \\
&\quad + k_2 AB (\sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_{ST}t) - \cos(\omega_{LO}t) \cos(\omega_{ST}t)) \\
&\quad + k_2 AB (\cos(\omega_{LO}t) \cos(\omega_{ST}t) + \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_{ST}t)) \\
&= k_0 + k_1 (A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_{ST}t)) \\
&\quad + \frac{k_2}{2} (A^2 + B^2) \\
&\quad - \frac{k_2}{2} (A^2 \cos(2\omega_{LO}t) + B^2 \cos(2\omega_{ST}t)) \\
&\quad - k_2 AB \cos((\omega_{LO} + \omega_S)t) \\
&\quad + k_2 AB \cos((\omega_{LO} - \omega_S)t)
\end{aligned}$$

Dies ist im wesentlichen der Ausgangsstrom des Mischers. Ohne Mühe erkennt man Terme für die ursprüngliche Schwingung, einen Grundstrom, die erste harmonische der Grundschwingung, sowie einen Differenz- und einen Summenterm.

Die Leistung der höheren Harmonischen verschwindet mit steigender Ordnung der Korrekturterme rascher als die der Summen- und Differenzfrequenz. Daher werden nur die Zwischenfrequenz  $\nu_{ZF} = |\nu_{LO} - \nu_S|$ , die Summenfrequenz  $\nu_{LO} + \nu_S$  und eine Spiegelfrequenz  $\nu_i := 2\nu_{LO} - \nu_S$  berücksichtigt. Dabei stammt  $\nu_i$  aus Korrekturtermen höherer Ordnung.

Offenbar haben auf die Zwischenfrequenz Signale sowohl der Signal- als auch der Spiegelfrequenz Einfluß. Diese bezeichnet man als *Seitenbänder*. Filtert man eines dieser Bänder, so spricht man vom *Einseitenbandbetrieb (SSB)*, sonst vom *Doppelseitenbandbetrieb (DSB)*.

Der SSB wird zur Messung von Linienspektren verwendet, während der DSB bei Kontinuumsmessungen zum Einsatz kommt. Dabei hat man gegenüber dem SSB den

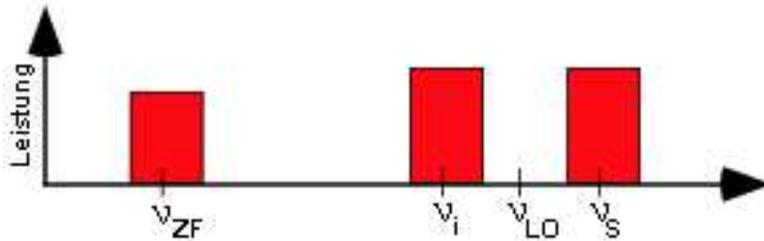


Abbildung 2: Relevante Frequenzen. Quelle: [5]

Vorteil, daß man mit doppelter Signalstärke bei gleichem Eigenrauschen des Mixers rechnen kann. Es ergäbe sich somit eine Verdoppelung der Empfindlichkeit. Allerdings dämpft der Spiegelfrequenz-Filter das empfangene Signal. Seine Rauschtemperatur trägt außerdem zum Rauschen des Gesamtsystems bei.

Die Amplitude der Zwischenfrequenz scheint in der obigen Rechnung linear mit der Amplitude des Lokaloszillators zusammenzuhängen. In der Praxis kann man allerdings die Leistung des LO nicht beliebig hochfahren, da sonst  $\delta U$  sehr groß wird. Man muß dann Terme höherer Ordnung in der Entwicklung stärker berücksichtigen. In der Praxis gibt es eine Sättigung des Mixers. Bei höherer LO-Leistung fallen die Mischverluste nicht weiter.

### 1.7.1 Schottky-Diode

Die Schottky-Diode ist eine Halbleiterdiode mit einem Metall-Halbleiter-Übergang. Weil Elektronen leichter aus N-Silizium in die Metallschicht gelangen als umgekehrt, entsteht in der Silizium-Schicht ein Elektronen verarmter Bereich, die sogenannte Schottky-Sperrschicht. Der Ladungstransport besteht ausschließlich aus Elektronen. Dadurch ist dieses Bauelement als schneller Schalter oder Mikrowellen-Gleichrichter geeignet.

Quelle: [3]

Die Schottky-Diode hat einen im Vergleich zu anderen Dioden viel niedrigeren Widerstand in Durchlaßrichtung. Die Strom - Spannungs - Charakteristik eines Schottky - Kontakts ist gegeben durch

$$I = I_S \left( \exp \left( \frac{eU}{\mu kT} \right) - 1 \right)$$

mit dem *Sperrsättigungsstrom*  $I_S$  und einem temperaturabhängigen Korrekturfaktor  $\mu$ . Bei Raumtemperatur gilt theoretisch  $\mu > 1,0$ , praktisch ist aber  $\mu > 1,05$ .

Die Schottky-Sperrschicht besitzt eine Kapazität  $C_S$ . Diese vergrößert die Mischverluste. Da sie proportional zur Fläche  $A$  des Kontakts ist, versucht man  $A$  möglichst klein zu halten. Es werden Größenordnungen von  $1\mu m^2$  erreicht.

## 1.7.2 SIS-Mischer

Das Akronym steht für *Supraleiter-Isolator-Supraleiter*. Zwei Supraleiter werden durch eine dünne Isolatorschicht getrennt. Bei  $T = 0$  sind alle Energieniveaus bis zur Fermigrenze  $W_f$  weniger der Bindungsenergie eines Cooper-Paars  $\Delta$  aufgefüllt. Bei angelegter Spannung  $U$  ergibt sich ein Stromfluß erst dann, wenn  $Ue \geq 2\Delta$ . Einzelne Elektronen durchtunneln nun die Isolatorschicht und besetzen im zweiten Supraleiter die oberen freien Energieniveaus.

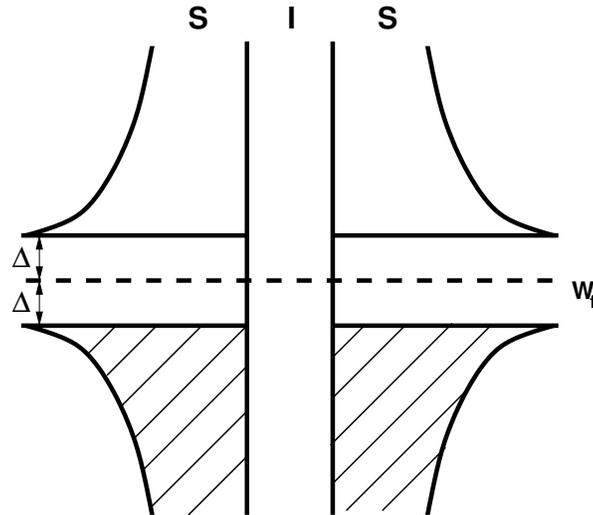


Abbildung 3: Elektronenzustände im SIS-Übergang bei 0 Kelvin ohne angelegte Spannung. Quelle: [2]

Gilt  $Ue < 2\Delta$ , so kann die für einen Stromfluß nötige Energie auch aus einem äußeren Strahlungsfeld entnommen werden. Idealerweise gilt  $\hbar\omega = 2\Delta - eU$ . Für höhere Strahlungsenergien ist auch noch ein Tunnelstrom vorhanden. Er ist aber schwächer als im Idealfall, da für höhere Energien die Zustandsdichte im Supraleiter abnimmt.

Die zur Überwindung der “Bandlücke” nötige Energie kann auch von  $n$  Photonen  $\hbar\omega$  bereitgestellt werden. In diesem Fall gilt  $n\hbar\omega = 2\Delta - eU$ .

Auch bei Spannungen über  $\frac{2\Delta}{e}$  kann ein Strahlungsfeld das Tunneln unterstützen. Passende stimulierte Emission kann die Elektronen auf die Energieniveaus mit großer Zustandsdichte herunterbringen.

Die Strom-Spannungscharakteristik wird durch ein vorhandenes Strahlenfeld abgestuft. Da der Quotient  $\frac{T}{T_c}$  für die Schärfe der Stufen entscheidend ist, verringert sich diese mit steigender Temperatur rasch. Temperaturen unter 4K sind anzustreben.

SIS-Mischer haben ein niedriges Eigenrauschen für Frequenzen unterhalb 100 GHz. Da sie in Aufdampftechnik gefertigt werden, sind sie mechanisch stabil.

### 1.7.3 Quantenmischer

Man spricht von einem Quantenmischer, wenn die Empfindlichkeit des Geräts nur noch durch die Heisenbergsche Unschärferelation bestimmt ist. In diesem Fall ist die Rauschtemperatur  $T = \frac{\hbar\omega}{k_B}$ .

### 1.7.4 Mischeffizienz (Conversion Efficiency)

Die Mischeffizienz ist definiert als die Ausgangsleistung bei Zwischenfrequenz geteilt durch die Eingangsleistung bei Signalfrequenz:

$$\eta(ZF) = \frac{P_{ZF}}{P_S}$$

## 1.8 Rauschen

Unter Rauschen versteht man grundsätzlich alle störenden Signale, die das Meßergebnis verfälschen. Dies kann zum einen durch äußere Einflüsse (Hintergrundrauschen) geschehen oder aber auch durch spontane, zufällige Fluktuationen im untersuchten System und den Meßgeräten selbst. Während man das Hintergrundrauschen in der Regel durch geeignete Abschirmungen genügend vermindern kann, stellt das "innere" Rauschen ein sehr viel grundlegenderes Problem dar.

So weisen z.B. alle elektronischen Bauteile an ihren Ein- und Ausgängen wegen der statistisch schwankenden Dichte- und Geschwindigkeitswerten, die sich aus der Teilchennatur ergeben, Fluktuationen der Spannung und des Stroms auf. Dieses Rauschen beschränkt natürlich die Leistungsfähigkeit dieser Bauteile und setzt somit der Meßempfindlichkeit Grenzen.

Man unterscheidet verschiedene Arten des "inneren" Rauschens, die wichtigsten sind das thermische Rauschen, das Schrotrauschen und das 1/f-Rauschen.

### 1.8.1 Thermisches Rauschen

Diese Art des Rauschens, die in der Regel den größten Anteil des "inneren" Rauschens ausmacht, wird durch die thermische Bewegung der einzelnen Teilchen erzeugt. So mißt man zum Beispiel in einem Widerstand eine Schwankung der Strom- und Spannungswerte auf Grund der thermischen Bewegung der Leitungselektronen. Man kann das Rauschen an einem Widerstand  $R$  durch ein Ersatzschaltbild mit einem rauschfreiem Widerstand und einer parallel dazu geschalteten Stromquelle, die den Rauschstrom liefert, bzw. eine in Serie geschaltete Rausch-Spannungsquelle, beschreiben. Thermisches Rauschen ist unvermeidbar und stellt somit eine natürliche Grenze für die Rauschverminderung dar. Beim thermischen Rauschen ist die Rauschleistung bis hin zu sehr hohen Frequenzen unabhängig von der Frequenz, man bezeichnet ein solches Rauschen deshalb als "weißes" Rauschen.

## 1.8.2 Schrotrauschen

Schrotrauschen entsteht dadurch, daß Strom auf Grund der Teilchennatur der Elektronen nicht kontinuierlich fließen kann, sondern in Einheiten der Elementarladung  $e$ , Strom ist also “körnig”. Beim Schrotrauschen handelt es sich auch um “weißes” Rauschen.

## 1.8.3 1/f-Rauschen

Unter dem Begriff 1/f-Rauschen versteht man alles Rauschen, das eine  $f^{-\alpha}$ -Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  hat. Da 1/f-Rauschen mit steigender Frequenz abnimmt, spielt diese Art der Rauschens vor allem bei niedrigeren Frequenzen eine Rolle. Bei Halbleitern ist es auf Oberflächen- und Grenzflächen-Effekte zurückzuführen und kann durch entsprechende Oberflächenbehandlung vermindert werden. Man bezeichnet diese Art des Rauschens wegen seiner Frequenzabhängigkeit als “pink noise”.

## 1.9 Nyquist-Theorem

### 1.9.1 Qualitative Vorbetrachtung

Die Formel

$$\langle V^2 \rangle = 4k_B RT \Delta\nu$$

für die thermische Rauschleistung eines Bauteils soll hergeleitet werden.

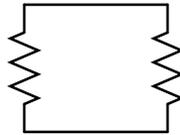


Abbildung 4: Parallel geschaltete Bauteile, repräsentiert durch Widerstände

Dazu betrachtet man zunächst zwei parallel geschaltete Bauteile gleichen Widerstands  $R$  bei gleicher Temperatur  $T$  (siehe Abb. 4). Sei  $P_{12}$  die vom ersten zum zweiten Bauteil transportierte Leistung,  $P_{21}$  entsprechend. Nach kurzer Zeit wird sich ein thermisches Gleichgewicht einstellen, und es gilt  $P_{12} = P_{21}$ .

Angenommen, die vom ersten Bauteil im Frequenzabschnitt  $\Delta\nu$  um  $\nu$  produzierte Leistung wäre größer als die vom zweiten Bauteil zum ersten im selben Frequenzabschnitt. Nun schaltet man zwischen die beiden Widerstände ein serielles LC-Glied mit Resonanzfrequenz  $\nu$  (siehe Abb. 5). Nun fließt insgesamt Energie vom ersten zum zweiten Bauteil. Das widerspricht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Also ist die von beliebigen Bauteilen bei gleicher Temperatur produzierte Leistung höchstens abhängig von der Frequenz  $\nu$ , der Temperatur  $T$  und dem Widerstand  $R$ .

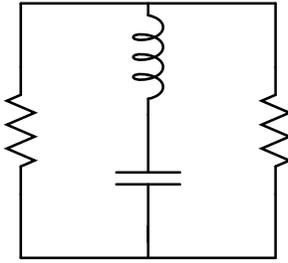


Abbildung 5: Eingefügtes LC-Glied

### 1.9.2 Quantitative Herleitung der Nyquist-Formel

Diese Betrachtung ist analog zur Planckschen Betrachtung, die zum Schwarzkörperspektrum führt. Man betrachte einen auf beiden Seiten terminierten eindimensionalen Wellenleiter der Länge  $L$ . Die Terminierung ist so zu wählen, daß Spannungswellen an beiden Enden vollständig absorbiert werden. Die Abschlußwiderstände müssen also der Impedanz der Leitung entsprechen. Die Leitung sei frei von Ohmschen Verlusten.

Die Geschwindigkeit einer Welle  $V(x, t) = V_0 \cos(k_x x - \omega t)$  ist

$$v = \frac{\omega}{k_x} \quad (2)$$

Die Wellenmoden sind durch die Terminierung diskretisiert, da gelten muß  $V(L, t) = V(0, t)$  für alle  $t$ . So erhalten wir den Zusammenhang

$$k_x L = 2\pi n, n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Die Anzahl der Moden pro Frequenz pro Länge ist  $D(\omega) = \frac{1}{L} \frac{dn}{d\omega}$ . Die Kettenregel liefert

$$D(\omega) = \frac{1}{L} \frac{dn}{dk_x} \frac{dk_x}{d\omega} \stackrel{(2),(3)}{=} \frac{1}{2\pi v} \quad (4)$$

Nun benötigen wir noch die Energie einer Mode. Im klassischen Limes liefert uns jeder quadratische Term in der Hamiltonfunktion nach dem Äquipartitionsgesetz eine mittlere Energie von  $k_B T$ . Für die EM-Welle besteht die Hamiltonfunktion aus elektrischem und magnetischen Beitrag, es gilt also für die mittlere Energie einer Wellenmode:

$$\langle E(\omega) \rangle \approx k_B T \quad (5)$$

Nun können wir die Energiedichte  $\epsilon(\omega)$  im Wellenleiter bestimmen. Wir müssen nur die Modendichte aus (4) mit der Energiedichte aus (5) multiplizieren:

$$\epsilon(\omega) = \frac{k_B T}{2\pi v}$$

Energiedichte ist ein anderes Wort für Kraft. Also ist die bei  $\omega$  transportierte Leistung

$$\begin{aligned} P(\omega) &= v \cdot \epsilon(\omega) \\ &= \frac{k_B T}{2\pi} \end{aligned} \quad (6)$$

Die vom thermischen Rauschen im Widerstand erzeugte elektrische Leistung ist durch

$$\begin{aligned} P(\omega) &= R \langle I(\omega)^2 \rangle \\ &\stackrel{R_{ges}=2R}{=} R \left\langle \frac{U(\omega)}{4R^2} \right\rangle \\ &= \frac{\langle U(\omega) \rangle}{4R} \end{aligned} \quad (7)$$

gegeben.

Setzt man nun (6) und (7) gleich, so erhält man  $\langle U^2(\omega) \rangle = \frac{4Rk_B T}{2\pi}$ . Integration über einen Frequenzabschnitt liefert  $\langle U^2 \rangle = \frac{4Rk_B T \Delta\omega}{2\pi}$ . Es ergibt sich die Nyquist-Formel

$$\langle U^2 \rangle = 4k_B T R \Delta\nu \quad (8)$$

Quelle: [4]

## 1.10 Rauschleistung

Wie oben beschrieben kann das thermische Rauschen in einem Stromkreis durch ein Ersatzschaltbild dargestellt werden. Schließt man nun an einen solchen rauschenden Widerstand  $R_r$  einen Lastwiderstand  $R_l$  an, so gilt nach der Maschenregel

$$\sqrt{\langle u^2 \rangle} = (R_r + R_l) \cdot \sqrt{\langle i^2 \rangle},$$

bzw.

$$\sqrt{\langle i^2 \rangle} = \frac{\sqrt{\langle u^2 \rangle}}{R_r + R_l}$$

wobei  $\langle u^2 \rangle$  und  $\langle i^2 \rangle$  die mittleren Schwankungsquadrate von Spannung und Strom sind. Für die Leistung am Rauschwiderstand gilt:

$$P_r = \sqrt{\langle u^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle i^2 \rangle} = \langle i^2 \rangle R_r$$

damit ergibt sich insgesamt für die Rauschleistung:

$$P_r = \frac{\langle u^2 \rangle}{(R_r + R_l)^2} R_r$$

Maximale Rauschleistung erhält man also für  $R_l = R_r$ :

$$P_r = \frac{\langle u^2 \rangle}{4R_r}$$

mit der Nyquist-Formel  $\langle u^2 \rangle = 4kTR_r\Delta f$

ergibt sich dann

$$P_r = k_B T \Delta f$$

Man kann dann mit Hilfe dieser Gleichung einer Rauschleistung eine "Strahlungstemperatur" zu ordnen.

## 1.11 Schwarzer Körper

Alle Körper, die eine Temperatur über dem absoluten Nullpunkt haben, emittieren und absorbieren, -ihrer Temperatur entsprechend-, ständig Wärmestrahlung. Ist das thermische Gleichgewicht zwischen Körper und Umgebung gestört, überwiegt solange einer der beiden Prozesse bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist. Mit steigender Temperatur wächst dabei die Intensität der Strahlung und in der spektralen Verteilung der Strahlung nimmt der Anteil der kurzwelligeren Strahlung nach dem Planckschen Strahlungsgesetz zu. Man kann das Emissionsverhalten eines solchen Temperaturstrahlers durch den spektralen Emissionsgrad  $\epsilon(\lambda)$  charakterisieren. Der spektrale Emissionsgrad eines beliebigen Körpers ist definiert als Quotient der von ihm emittierten spektralen Strahlungsdichte  $L_\lambda$  zu der von einem schwarzen Strahler emittierten Strahlungsdichte  $L_{\lambda,s}$ :  $\epsilon(\lambda) = \frac{L_\lambda}{L_{\lambda,s}}$

Ein schwarzer Strahler ist ein Körper, der Strahlung jeder Frequenz komplett absorbiert und somit für alle Frequenzen den höchst möglichen Absorptionsgrad hat. Außerdem hat ein solcher schwarzer Körper dann auch für jede Frequenz den höchst möglichen Emissionsgrad, da ja nach Kirchhoff gilt, daß ein Körper genau Strahlung der Frequenzen aussenden kann, die er bei gleicher Temperatur auch absorbiert. Es gilt:  $\alpha(\lambda, T) = \epsilon(\lambda, T)$  Der spektrale Emissionsgrad eines beliebigen Temperaturstrahlers ist also immer kleiner als eins und die Strahlungsdichte ist geringer als die eines schwarzen Strahlers bei gleicher Temperatur.

Tritt Strahlung in Wechselwirkung mit Materie so kann man außer der oben schon erwähnten Absorption und Emission noch einen dritten Effekt beobachten die Reflexion. Gut reflektierende Körper haben einen kleinen Absorptionsgrad  $\alpha$  und damit auch einen kleineren Emissionsgrad  $\epsilon$ , daher ist ihre Strahlungsdichte  $L_\lambda$  klein gegenüber der eines schwarzen Körpers.

## 1.12 Hot-Cold-Verfahren

Nach Abschnitt 1.9 gilt  $P \sim T$ , also  $P = cT$  mit einer Konstanten  $c = k \cdot \Delta\nu$ , die allerdings unbekannt ist. Um also  $T$  direkt aus  $P$  bestimmen zu können, müsste man also zunächst  $c$  bestimmen. Dies kann man vermeiden, indem man das Hot-Cold-Verfahren verwendet.

Für die Gesamttemperatur gilt  $T = T_R + T_A$ , wobei  $T_R$  die Empfängerrauschtemperatur und  $T_A$  die Antennentemperatur ist. Also gilt  $P = c \cdot (T_R + T_A)$ . Wenn man nun zwei verschiedene Antennentemperaturen  $T_H$  und  $T_C$  verwendet und das Verhältnis der zugehörigen gemessenen Leistungen  $Y := \frac{P_H}{P_C}$  berechnet, gilt also  $Y = \frac{c \cdot (T_R + T_H)}{c \cdot (T_R + T_C)} = \frac{T_R + T_H}{T_R + T_C}$ . Hieraus folgt dann  $T_R = \frac{T_H - Y T_C}{Y - 1}$ .

## 1.13 Gesamtrauschtemperatur der Verstärkerkette, Mischverlust

Wenn man  $N$  Komponenten mit Verstärkungen  $G_i$ , äquivalenten Temperaturen  $T_i$  und Leistungen  $P_i$  aneinanderkettet, so gilt für die Gesamtleistung  $P = \sum_{i=1}^N P_i$ . Es gilt allgemein der Zusammenhang  $P_i = c T_i G'_i$  und  $P = c T G$  mit  $c = k \Delta\nu$ ,  $G = \prod_{j=1}^N G_j$  und  $G'_i = \prod_{j=i}^N G_j$  (also ist  $G'_i$  die Gesamtverstärkung der Verstärkerkette ab der Komponente  $i$  und  $G = G'_1$ ). Damit gilt  $P = c T G = c \sum_{i=1}^N T_i \prod_{j=i}^N G_j$ ,

$$\text{also } T = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^{i-1} \frac{T_i}{G_j}.$$

Wenn man nun den Mischer als erste Komponente mit  $T_1 = T_M$  und  $G_1 = 1$  und den Rest als zweite Komponente mit  $T_2 = T_{ZF}$  und  $G_2 = \frac{1}{L}$  betrachtet, erhält man also  $T_R = T_M + L \cdot T_{ZF}$ .  $L$  bezeichnet man als Mischverlust.

## 1.14 Radiometerformel

Nach Abschnitt 1.7 gilt allgemein der Zusammenhang

$$P = k \cdot T \cdot \Delta\nu$$

Mit  $T = G \cdot (T_{sys} + \Delta T)$  folgt damit für die Ausgangsleistung des Verstärkers, falls  $\Delta T \ll T_{sys}$ :

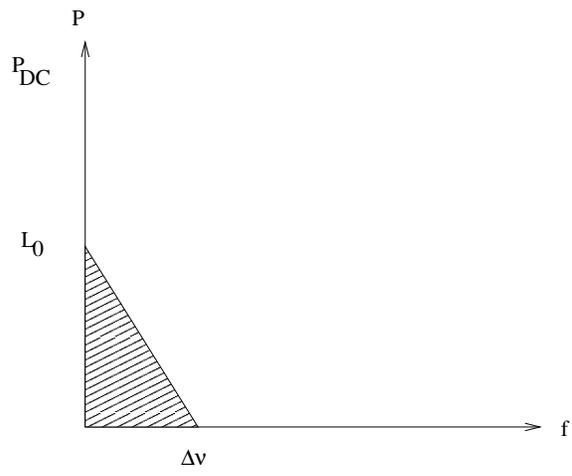
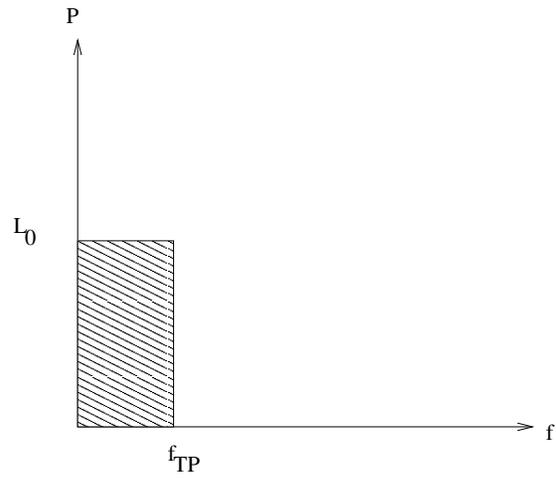
$$P_{HF} = G \cdot k \cdot (T_{sys} + \Delta T) \cdot \Delta\nu$$

Diese Rauschleistung wird dann zur Gleichrichtung an einen Detektor gegeben, welcher im Idealfall eine quadratische Kennlinie hat, d.h. es gilt

$$U_{det} \sim U_{HF}^2$$

Mit  $U_{HF}^2 \sim P_{HF}$  und, wie oben gesehen,  $P_{HF} \sim T_{sys} + \Delta T$  folgt sofort  $U_{det} \sim T_{sys} + \Delta T$ , also

$$U_{det} \sim (T_{sys} + \Delta T)$$



An den Abbildungen erkennt man folgende Zusammenhänge:  $P_{NF} = L_0 \cdot f_{TP}$  und  $L_0 = 2 \cdot \frac{P_{DC}}{\Delta\nu}$ ; wobei  $P_{NF}$ =Schwankungsleistung und  $P_{DC}$ =Gleichspannungsleistung sind. Wegen  $P_{NF} \sim U_{NF}^2$  und  $P_{DC} \sim U_{DC}^2$  mit gleicher Proportionalitätskonstante (gleicher Widerstand!), folgt also:

$$\frac{U_{NF}}{U_{DC}} = \sqrt{2 \cdot \frac{f_{TP}}{\Delta\nu}}$$

Andererseits: Definiert man die Nachweisgrenze  $\Delta T$  so, dass das zugehörige Signal eine Gleichspannung erzeugt, die genauso groß ist wie  $U_{NF}$  und benutzt, wie oben gezeigt, dass  $U_{det} \sim (T_{sys} + \Delta T)$ , so folgt:

$$\frac{U_{NF}}{U_{DC}} = \frac{\Delta T}{T_{sys}}$$

Fasst man nun beide Ausdrücke für  $\frac{U_{NF}}{U_{DC}}$  zusammen, erhält man:

$$\Delta T = T_{sys} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{f_{TP}}{\Delta\nu}}$$

Die Grenzfrequenz  $f_{[TP]}$  ist durch die Frequenzcharakteristik  $G(f)$  gegeben:

$$f_{TP} = \frac{1}{G(0)} \int_0^\infty G(f) df$$

Für einen idealen Integrator gilt  $G(\omega) = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\omega\tau)}{\frac{1}{2}\omega\tau}$ , damit folgt  $f_{TP} = \frac{1}{2\tau}$ . Damit erhält man die sogenannte Radiometerformel:

$$\Delta T = \frac{T_{sys}}{\sqrt{\tau \Delta\nu}}$$

## 2 Auswertung

### 2.1 Aufgabe 1: Kalibration des variablen Dämpfungsglieds

Das variable Dämpfungsglied soll geeicht werden. Dazu werden die nötigen Skalenteile am Dämpfungsglied gegen die entsprechende Dämpfung aufgetragen. Der Fehler der Dämpfung berechnet sich nach Gauß aus den beiden eingestellten Leistungen über 1 dB =  $10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$  mit der Formel  $\Delta(\text{Dämpfung}) = 10 \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta P_1}{P_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_2}{P_2}\right)^2}$ .

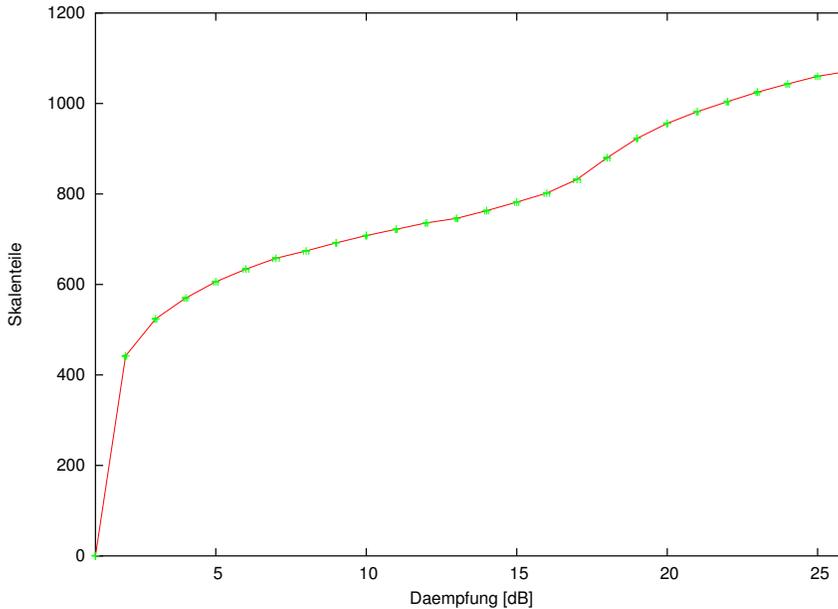


Abbildung 6: Eichkurve

### 2.2 Aufgabe 2: Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur $T_R(P_{LO})$

Mittels der Hot-Cold-Methode wird über  $Y = \frac{P_H}{P_C}$  und  $T_R = \frac{T_H - Y T_C}{Y - 1}$  die Rauschtemperatur des Empfängers ermittelt.

Aus Abbildung 2.2 und Tabelle 4 ist zu erkennen, daß  $T_R$  minimal für minimale Einstellung des variablen Dämpfungsglieds wird.

Für die Fehler gilt:

$$\Delta Y = Y \sqrt{\left(\frac{\Delta P_H}{P_H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_C}{P_C}\right)^2}$$

$$\Delta T_R = \frac{T_H - T_C}{(Y - 1)^2} \cdot \Delta Y$$

### Aufgabe 1

Dämpfung (dB)	delta Skt
1	0
2	442
3	524
4	570
5	606
6	634
7	658
8	674
9	692
10	708
11	722
12	736
13	746
14	763
15	782
16	802
17	832
18	880
19	923
20	956
21	982
22	1004
23	1025
24	1043
25	1060
26	1071

Tabelle 2: Eichung der Dämpfungsgliedsskala

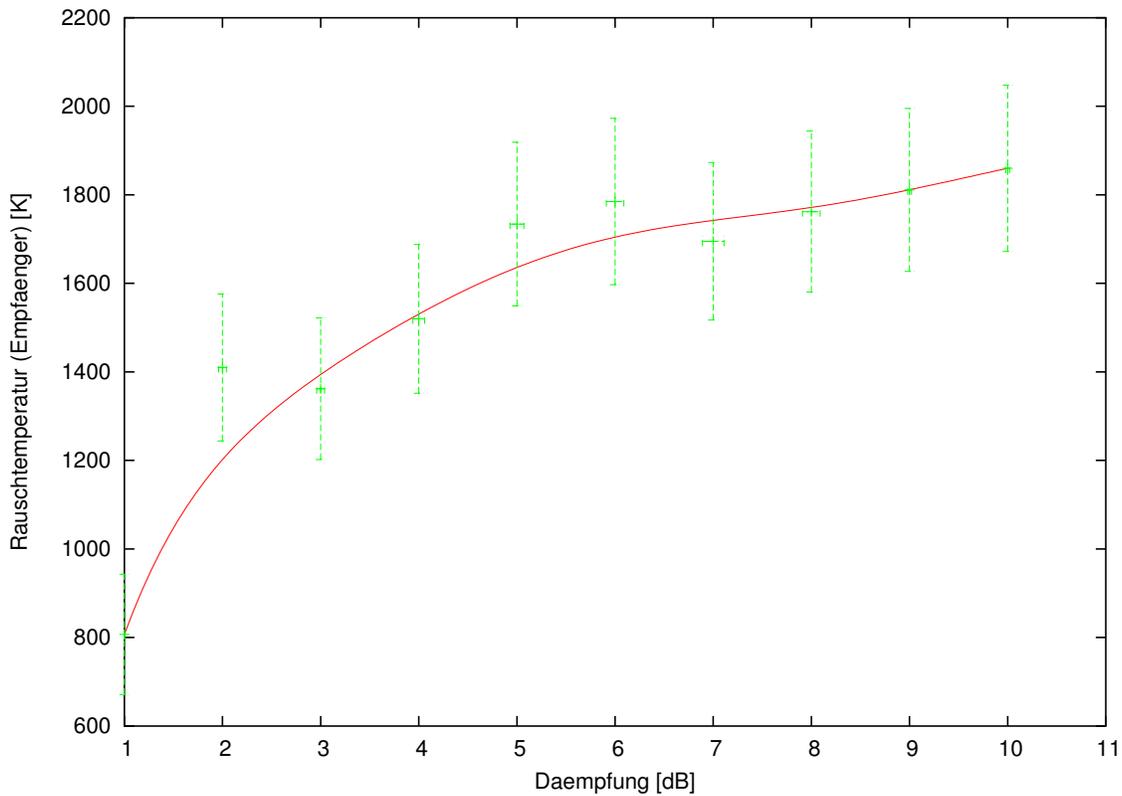


Abbildung 7: Rauschtemperatur-Dämpfungscurve

### Aufgabe 2

Skt	$P_{hot}(\mu\text{W})$	$\Delta P_{hot}(\mu\text{W})$	$P_{cold}(\mu\text{W})$	$\Delta P_{cold}(\mu\text{W})$	$Y$	$\Delta Y$	$T_R(K)$	$\Delta T_R(K)$
0	18.1	0.01	9.78	0.01	1.85	0.02	807	136
442	18.3	0.01	10.5	0.01	1.74	0.02	1410	166
524	18.6	0.01	10.62	0.01	1.75	0.02	1362	160
570	18.8	0.01	10.91	0.01	1.72	0.02	1520	168
606	18.6	0.01	11.04	0.01	1.68	0.02	1734	185
634	18.7	0.01	11.16	0.01	1.68	0.02	1785	188
658	19.1	0.01	11.29	0.01	1.69	0.02	1695	178
674	19.2	0.01	11.43	0.01	1.68	0.02	1762	182
692	19.3	0.01	11.55	0.01	1.67	0.02	1811	184
708	19.3	0.01	11.61	0.01	1.66	0.02	1860	188

Tabelle 4: Hot/Cold-Messung für den Empfänger bei unterschiedlicher Dämpfung

### 2.3 Aufgabe 3: Bestimmung der ZF-Rauschtemperatur

Verglichen werden sollen die Rauschtemperatur der ZF-Verstärkerkette und die der Kette mit vor- bzw. nachgeschaltetem Bandpassfilter. Verwendet wird hier wieder die Hot-Cold-Methode mit Rauschdiode und Dämpfungsglied.

Für die Messung ohne Bandpassfilter erhält man  $T_{ZF} = (453 \pm 115)$  K; für die Messung mit nachgeschaltetem Bandpassfilter ist  $T_{ZF} = (765 \pm 150)$  K. Bei vorgeschaltetem Bandpassfilter gilt  $P_H = P_C = 16,9$  mW, also lässt sich hier wegen  $Y=1$  kein Wert für  $T_{ZF}$  berechnen.

Da das durch den Filter eingebrachte Rauschen so hoch ist, daß das schwache Signal der Rauschdiode völlig übertönt wird, muss der Bandpassfilter hinter der Verstärkerkette positioniert werden.

### 2.4 Aufgabe 4: Bestimmung des Mischverlusts $L$

Durch Schaltung zusätzlicher Dämpfungsglieder vor die ZF-Kette läßt sich das Rauschen des Empfängers erhöhen. Man ermittelt durch das Hot-Cold-Verfahren mehrere  $(T_R, T_{ZF})$  - Wertepaare, trägt diese gegeneinander auf und erhält aus Achsenabschnitt und Steigung der entstehenden Gerade die Werte für  $T_M$  und  $L$  über die Beziehung  $T_R = T_M + L \times T_{ZF}$ .

Man misst jeweils  $P_H$  und  $P_C$  und ermittelt dann daraus  $T_R$  und  $T_{ZF}$  über  $Y = \frac{P_H}{P_C}$  und  $T_R = \frac{T_H - Y T_C}{Y - 1}$  bzw.  $T_{ZF} = \frac{T_H - Y T_C}{Y - 1}$ .

Die rechnerische Geradenanpassung liefert die Werte  $L = 1,64 \pm 0,12$  und  $T_M = (81 \pm 160)$  K.

Der Mischverlust liegt also im erwarteten Bereich. Der Fehler ist annehmbar klein. Auch die Rauschtemperatur des Mischers scheint erwartet niedrig. Leider ist sie mit einem riesigen Fehler behaftet, so daß sie auch recht hoch liegen könnte. Gründe sind große Meßfehler insbesondere bei hoher Dämpfung und die weite Entfernung der Werte von der y-Achse (Siehe Abb. 8).

### 2.5 Aufgabe 5: Bestimmung von $T_R$ mit Hornantenne und Abschlusswiderstand

Sowohl die Hornantenne als auch der  $50\Omega$ -Abschlusswiderstand werden einmal bei Raumtemperatur und einmal bei einer Temperatur von 77 K vor das Radiometer geschaltet. Aus den gemessenen Werten für  $P_H$  und  $P_C$  wird dann  $T_R$  mit  $Y = \frac{P_H}{P_C}$  und  $T_R = \frac{T_H - Y T_C}{Y - 1}$  errechnet.

Fehlerrechnung:

$$\Delta Y = Y \sqrt{\left(\frac{\Delta P_H}{P_H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_C}{P_C}\right)^2}$$

#### Aufgabe 4

Dämpfung (dB)	0	1	2	3	4	5
$\Delta$ Dämpfung (dB)	0	0	0.04	0.04	0.06	0.07
$P_{cold}(ZF)(\mu W)$	0.00978	0.271	0.236	0.208	0.184	0.162
$\Delta P_{cold}(ZF)(\mu W)$	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$P_{hot}(\mu W)$	0.0181	0.466	0.386	0.331	0.282	0.242
$\Delta P_{hot}(ZF)(\mu W)$	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$Y$	1.85	1.72	1.64	1.59	1.53	1.49
$\Delta Y$	0.02	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
$T_{ZF}(K)$	807	1821	2689	3246	4128	4825
$\Delta T_{ZF}(K)$	136	134	190	244	332	430

Dämpfung (dB)	0	1	2	3	4	5
$\Delta$ Dämpfung (dB)	0	0	0.04	0.04	0.06	0.07
$P_{cold}(ZF)(\mu W)$	0.01006	0.419	0.349	0.305	0.267	0.23
$\Delta P_{cold}(ZF)(\mu W)$	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$P_{hot}(ZF)(\mu W)$	0.0193	0.753	0.614	0.521	0.446	0.371
$\Delta P_{hot}(ZF)(\mu W)$	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$Y$	1.92	1.80	1.76	1.71	1.67	1.61
$\Delta Y$	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02
$T_{ZF}(K)$	397	1181	1477	1926	2303	2963
$\Delta T_{ZF}(K)$	113	73	95	122	153	208

Tabelle 6: Hot/Cold-Messung für Empfänger und Verstärkerkette mit zusätzlicher Dämpfung

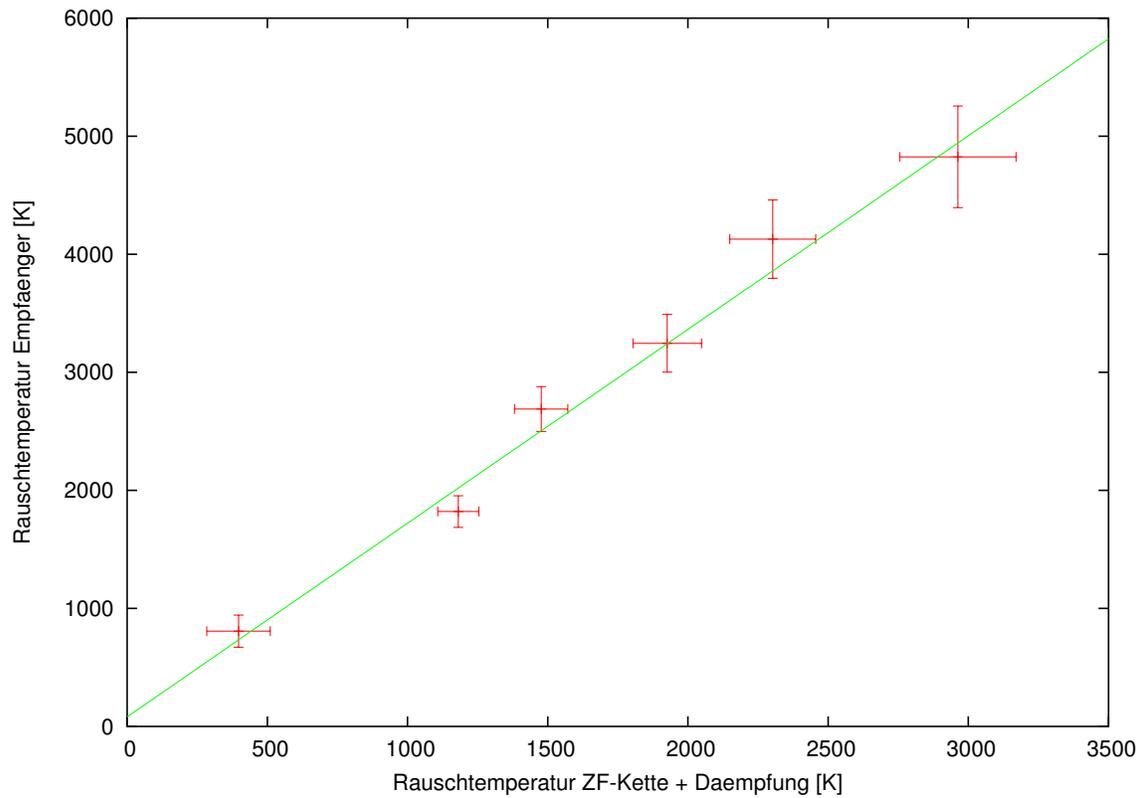


Abbildung 8:  $T_R$  gegen  $T_{ZF}$

$$\Delta T_R = \frac{T_H - T_C}{(Y - 1)^2} \cdot \Delta Y$$

Man erhält für die Hornantenne  $500.000 \pm 1.400.000$  K und für den Abschlusswiderstand  $70.000 \pm 34.000$  K.

Der Wert für den Abschlußwiderstand liegt im erwarteten Bereich. Der Wert für die Hornantenne ist mit einem absurd wirkenden Fehler behaftet und ohne Aussagekraft. Der geringe Unterschied zwischen Hot- und Cold-Messwert bedingt den großen Fehler. Der Unterschied ist nämlich kleiner als der Ablesefehler (siehe Tab. 8).

### Aufgabe 5

	Hornantenne	Widerstand
P(R)-hot	0.105	0.103
Delta Ph	0.001	0.001
P(R)-cold	0.104	0.0967
Delta Pc	0.001	0.001
Y	1.01	1.07
Delta Y	0.03	0.03
Tr	487105	67840
Delta Tr	1397885	33669

Raumtemperatur                      25.75 (°C)

Tabelle 8: Hot/Cold-Messung mit Horndiode/Abschlußwiderstand

## Literatur

- [1] KOSMA Arbeitsgruppe für supraleitende Detektoren und Mischer.  
<http://www.ph1.uni-koeln.de/micro/deutsch/wir.html>.
- [2] O. Hachenberg and B. Vowinkel. *Technische Grundlagen der Radioastronomie*. Bibliographische Institut Mannheim/Wien/Zürich, ?
- [3] E-Online Magazin. <http://www.e-online.de/sites/bau/0201102.htm>.
- [4] Nichols A. Romero. Johnson noise. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, [w3.physics.uiuc.edu/~nromero/archive/8.14.pdf](http://w3.physics.uiuc.edu/~nromero/archive/8.14.pdf), 1998.
- [5] Eric Weisstein. Mixer. Technical report, Wolfram Research, <http://scienceworld.wolfram.com/physics/Mixer.html>, ?